<u>Kühe, Pferde, Schafe</u>

(überarbeiteter) Unterrichtsentwurf einer Stunde zum Thema

„In Vertretungsstunden Problemlösestrategien entwickeln“

Hans-Joachim Brehm , StR

Datum:	Freitag, 2016-110-014	**Schule:**	Kant-Gymnasium (05Y02)	**Fach:**	Mathematik
Zeit:	8.50 Uhr – 9.35 Uhr	**Raum:**	Stammhaus , Raum 19	**Klasse:**	6 (Frau Lede-Piper)

0. Bisherige Unterrichtsbesuche

Datum	Fach	Klasse/Kurs	Besucher	Stundenthema	Inhalt, Kompetenzbezug	ggf. Bemerkungen
20. März 2015	Ma	JÜL 1 – 2 - 3	FS GS Brehm	Pentominos: Wie viele Quadrat-Fünflinge gibt es	*Form und Veränderung* *Problemlösen*	Unterricht von Frau Harborth
16. Okt. 2015	Ma	Klasse 6	FS GS Brehm	Wie viele Flaschen Cola müssen gekauft werden?	*Zahlen und Operationen:* Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch *Argumentieren:* Die Schüler_innen berechnen das Ergebnis der Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch und verallgemeinern das am Beispiel gewonnene Ergebnis zu der entsprechenden allgemeinen Regel	
8. April 2016	Ma	Klasse 6	FS GS Brehm	Das Haus der Vierecke	*Form und Veränderung* Eigenschaften von Vierecken *Argumentieren:* Die Schülerinnen erstellen die graphische Übersicht „Haus der Vierecke“ mittels der Relation „… ist auch ein …“.	

1. Individuelle Kompetenzentwicklung

Ich will versuchen, mich soweit wie möglich nicht als Lehrender, sondern lediglich als Organisator und Beobachter von Lernprozessen zu präsentieren, um so den Problemlöseprozess nicht zu beeinflussen oder in ihn lenkend einzugreifen. Entsprechend sollte mein Redeanteil im Unterricht minimiert werden.

2. Thema der Unterrichtsreihe

Thema: Vertretungsstunden

Überblick über die Unterrichtsreihe / Unterrichtssequenz: entfällt, da Einzelstunde

Leitidee der gesamten Sequenz: entfällt, da Einzelstunde

3. Thema der Unterrichtsstunde

Thema: Kühe, Pferde, Schafe – Lösungsstrategien für „Knobelaufgaben“

Inhalt: In dieser Stunde sollen die Schüler_innen Strategien entwickeln, reflektieren und kommunizieren, wie eine Knobel- bzw. Denksportaufgabe auf verschiedenste Art und Weise unter Einsatz unterschiedlichster Strategien gelöst werden kann.

4.	**Kompetenzen und Standards**

Standard des RLP / Kompetenzen	**Stand der Kompetenzentwicklung**	**Konkretisierung der Standards für die Stunde**
<u>Prozessbezogen:</u> *Problemlösen* Die Schüler_innen … … nutzen geeignete heuristische Methoden zum Lösen von Problemen, … stellen Lösungsprozesse dar, kommentieren und reflektieren diese und überprüfen Lösungen. („Allgemeine mathematische Fähigkeiten“, RLP 2004, S.21) Die Schüler_innen können … … Aufgaben bearbeiten, zu denen sie noch keine Routinestrategie haben, … Zusammenhänge erkennen und Lösungsstrategien auf ähnliche Sachverhalte übertragen. (Prozessbezogene mathematische Standards [K2] Probleme mathematisch lösen, RLP ab 2017/18, S.19)	unbekannt	Die Schüler_innen … … entwickeln und benutzen geeignete Problemlösungsstrategien, speziell das Umformulieren der Aufgabe, das Herstellen logischer Zusammenhänge sowie das systematisches Probieren. Sie präsentieren ihre Lösungsstrategie nachvollziehbar und fachsprachlich korrekt.
<u>Leitidee:</u> *Zahlen und Operationen* Die Schüler_innen … … rechnen sicher mit natürlichen Zahlen (RLP 2004, S.20)	Die Schüler_innen … … rechnen sicher mit natürlichen Zahlen	

Individuelle Kompetenzentwicklung:

5. Unterrichtsvoraussetzungen

Allgemein: Die Klasse 6 ist die Klasse des grundständigen Zuges am Kant-Gymnasium und wird hier seit der 5. Klasse unterrichtet. Die Klasse ist mir nicht bekannt, ich habe auch keine Informationen eingeholt, um so möglichst authentisch die Vertretungssituation zu simulieren. Für den Fachunterricht in Mathematik ist seit Beginn der 5. Klasse die Kollegin Lede-Piper zuständig.

Speziell: Die heutige Stunde ist die zweite Stunde der letzten Mathematikdoppelstunde vor den Herbstferien. In der ersten Stunde wurde das vorangegangene Thema mit der 1. Klassenarbeit abgeschlossen. Von daher werden die Schüler_innen weder erwarten, dass dieses Thema fortgesetzt wird noch dass ein neues Thema begonnen wird.

6. Fachlicher Schwerpunkt und didaktische Analyse

Fachlicher Schwerpunkt: Im Vordergrund der Stunde steht nicht die Erweiterung spezifischen Fachwissens, sondern die Förderung prozessbezogener Kompetenzen, speziell des mathematischen Problemlösens (siehe Literaturliste), in gewissem Umfang auch des mathematischen Kommunizierens. An Fachwissen wird lediglich die Addition bzw. Subtraktion im Raum der natürlichen Zahlen bis 20 benötigt.

Aufgabenanalyse: Die Aufgabe **„Ohne Kühe sind es sieben Tiere, ohne Pferde acht Tiere und ohne Schafe neun Tiere"** ist ein konkreter Spezialfall der allgemeinen Aufgabe „Ohne Kühe sind es A Tiere, ohne Pferde B Tiere und ohne Schafe C Tiere" mit $A, B, C \in \mathbb{N}$. Diese Aufgabe ist eindeutig lösbar genau dann, wenn sowohl $2\ /\ (A - B - C)$, also eine gerade Zahl ist, als auch zusätzlich $A - B - C \leq 0$. Damit hat die konkrete Aufgabe genau eine Lösung: Es gibt fünf Kühe, vier Pferde, drei Schafe, also genau zwölf Tiere (s.u.).
Die Aufgabe ist offen gestellt, eine Frage, die es zu beantworten gilt, wird nicht mitgestellt. Naheliegend ist die Frage, wie viele Tiere es von jeder Art gibt, aber auch die Frage nach der Gesamtanzahl aller Tiere, beide Fragen sind auf viele Arten lösbar.
Folgende Überlegungen helfen, das Problem strukturiert anzugehen und sind somit mögliche Lösungsansätze.

- „Ohne … bedeutet, dass es nur … und … sind", damit wird die Lösung bei entsprechender Umformulierung wesentlich erleichtert.
- Die Gesamtanzahl der Tiere muss wegen „Ohne Schafe sind es neun Tiere" mindestens zehn betragen.

- Es gibt am meisten Kühe und am wenigsten Schafe, die Anzahl der einzelnen unterscheidet sich um jeweils ein Tier.

Es sind rein argumentative Lösungen ebenso möglich wie die Lösung durch Probieren bzw. die Möglichkeit des systematischen Probierens nach bestimmten Vorüberlegungen, im Anhang findet sich eine (keineswegs vollständige) Auswahl von Lösungsmöglichkeiten als tabellarische Übersicht.

Didaktische Reduktion: Nicht erforderlich bzw. vgl. Aufgabenanalyse

Differenzierungsmaßnahmen: Die Aufgabe ist durch die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten (s.o.) selbstdifferenzierend, da alle Gruppen die Möglichkeit haben, entsprechend ihres Lern- und Leistungsstandes zu arbeiten.
Für den Fall, dass eine Gruppe sehr schnell fertig ist, kann auf die erweiterte Aufgabe (s.o., Aufgabenanalyse) zurückgegriffen werden.

Maßnahmen zur Sprachförderung: Zur Förderung mathematisch korrekter Argumentationen und Begründungen werden folgende Formlierungsvorschläge auf einem Arbeitsblatt vorgegeben, die insbesondere logische Argumentationstzrukturen :

„Zuerst haben wir …“ , „Dann haben wir …“ ,
„Wir haben festgestellt, dass …“ ,
„Weil … haben wir geschlossen, dass … “ ,
„Weil laut Aufgabe … gilt, konnten wir … berechnen.“ ,
„Schließlich haben wir überprüft, dass … „.

7. Begründung der Lehr- und Lernstruktur

Der **Einstieg** erfolgt, wie in einer Vertretungsstunde typisch, durch die Vorstellung der Lehrperson und ohne Anknüpfung an den vorangegangenen Unterricht. Die ledigliche Fixierung der Fakten der Aufgabe an der Tafel sollte bei den Schüler_innen im Sinne eines stillem Impulses bewirken, dass eine Aufgabenstellung formuliert wird, die ebenfalls an der Tafel festgehalten wird.

Die **Erarbeitung**, d.h. hier die Lösung des Problems, findet nach Klärung der Aufgabenstellung als Gruppenarbeit in von den Schüler_innen selbst gewählten und damit vermutlich heterogenen Gruppen der Stärke von fünf, maximal sechs Schüler_innen statt. Durch die Gruppenarbeit wird die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt ein Lösungsansatz gefunden wird, deutlich erhöht. Auch beim systematischen wie auch unsystematischen Probieren können in der Gruppe durch Arbeitsteilung mehr Fälle bearbeitet werden.

Um zu verhindern, dass fehlerhafte Lösungen unreflektiert kommuniziert werden, wird auf dem Arbeitsblatt explizit darauf hingewiesen, dass die Richtigkeit einer vermuteten Lösung stets zu überprüfen ist.
Sollten die Gruppen keinen Lösungsansatz finden, so stehen gestufte Hilfen zur Verfügung, die allerdings erst nach einiger Zeit benutzt werden dürfen, um nicht eigene Lösungsansätze durch Bequemlichkeit zu verhindern. Hilfe A1 führt zunächst darauf hin, dass erkannt wird, dass „Ohne … bedeutet: Nur … und …“. Sollte dieser Tipp nicht weiterhelfen, so gibt es zusätzlich mit Hilfe A2 eine vorgefertigte Tabelle, um so systematisches Probieren anzuregen. Hilfe B1 leitet direkt zum Ausprobieren an, auch hier wird durch die vorstrukturierte Tabelle unter Hilfe B2 das systematische Probieren unterstützt.

Sollten Gruppen das Problem schneller als erwartet lösen, so erhalten diese die Zusatzaufgabe, das Problem mit anderen numerischen Vorgaben zu untersuchen, dabei sind auch Aufgabenstellungen möglich, bei denen es keine Lösung gibt.

Die **Sicherungsphase** wird im Plenum vorgenommen um sicherzustellen, dass möglichst der verwendeten Lösungsstrategien allen Mitgliedern der Lerngruppe zugänglich gemacht werden, um so die Problemlösekompetenz zu erhöhen und zugleich die kommunikative Kompetenz der präsentierenden zu stärken.

8. Verlaufsplanung

Zeitangaben		Phase/Intention Prozessablauf / Impulse		Sozialform/ Medien
Zeit	Dauer	Ggf. Aktivitäten / Impulse des Unterrichtenden	Ggf. Schüleraktivitäten	
8.50	2‘	**Begrüßung** Nicht ritualisierte Begrüßung und Erläuterung der Situation des Unterrichtsbesuches		
8.52	3‘	**Einstieg** Stiller Impuls „Ohne Kühe sind es sieben, ohne Pferde sind es acht, ohne Schafe sind es neun“ Erarbeitung der Stundenfrage		Unterrichtsgespräch Tafel
8.55	30‘	**Erarbeitung** Aufteilung der Klasse in heterogene Zufallsgruppen von je fünf Schüler_innen, Erstellung von Gruppentischen. Gemeinsame Bearbeitung des Arbeitsauftrages, ggf. unter Benutzung der Hilfen und Hilfsmaterialien, unter Beobachtung durch die Lehrkraft und die Seminarteilnehmer_innen**, die bitte keinesfalls in das Geschehen aktiv eingreifen!**		Gruppenarbeit AB 0 Hilfen A1, A2, B1, B2 AB 1 , AB 2 Bildplättchen
		Didaktische Reserve / Differenzierung Lösung der Aufgabe für andere numerische Vorgaben, Entdeckung der Unlösbarkeit bei speziellen Vorgaben, Bedingungen der Lösbarkeit der Aufgabe. Vorbereitung der Präsentation		Gruppenarbeit mit Lehrerunterstützung
9.25	10‘	**Sicherung** Frontale Präsentation der Arbeitsergebnisse durch mehrere Gruppen, Fixierung der Lösungsstrategien an der Tafel		Unterrichtsgespräch, Schüler_innenpräsentation Tafel

9. Antizipation von Schwierigkeiten

Falls die Aufgabenstellung und insbesondere die Lösung (!) der Lerngruppe bereits bekannt sein sollte, wird in der Stunde das „Drei-Töchter-Problem“ behandelt: Das (ganzzahlige) Alter dreier Töchter ergibt multipliziert 36 und addiert die Hausnummer des Wohnhauses. Da auch nach Kenntnis dieser (inzwischen nicht mehr bekannter) Zahl die Aufgabe nicht lösbar ist, ist für die Lösung der Hinweis, dass die älteste Tochter Klavier spielt, notwendig.

10. Ausblick auf die weitere Planung

Entfällt, da es sich um eine Einzelstunde handelt.

11. Medien

Tafel
Arbeitsböge, s.u.
Laminierte Bildplättchen mit Kühen, Pferden, Schafen:



12. Literaturangaben

RLP

RLP ab 2017/18

Blum/Drüke-Noe/Hartung/Köller (Hrsg.): **Bildungsstandards Mathematik: konkret**
Cornelsen Scriptor, 5. Auflage 2010

Walther/Heuvel-Panhuizen/Granzer/Köller (Hrsg.): **Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret**
Cornelsen, 6. Auflage 2012

Bruder/Collet**: Problemlösen lernen im Mathematikunterricht**
Cornelsen Scriptor, 1. Auflage 2011

13. Anlagen

Tabellarische Übersicht zu ausgewählten Lösungsmöglichkeiten der Aufgabe

Die folgende tabellarische Übersicht zeigt -strukturiert nach der o.g. ersten Überlegung- einige, aber keineswegs alle Lösungsmöglichkeiten. Dabei werden folgende Abkürzungen bzw. Definitionen benutzt bzw. dem Text werden folgende vier Variable entnommen:

G: „Anzahl aller Tiere“,
K: „Anzahl der Kühe“, P: „Anzahl der Pferde“, S: „Anzahl der Schafe“.

<table>
<tr><th>Lösung durch …</th><th>Lösung ohne Benutzung des Zusammenhangs
„Ohne … bedeutet: Nur … und …“</th><th>Lösung mit Benutzung des Zusammenhangs
„Ohne … bedeutet: Nur … und …“</th></tr>
<tr><td>… Probieren</td><td colspan="2">Aus einer beliebigen, großen Anzahl von Tieren werden Tiere herausgenommen, bis das Problem gelöst ist.
(Die Eindeutigkeit der Lösung wird so nicht nachgewiesen)
Ausgehend von einer Kleinen Anzahl von Tieren werden Tiere hinzugefügt, bis das Problem gelöst ist.
(Die Eindeutigkeit der Lösung wird so nicht nachgewiesen)</td></tr>
<tr><td>… systematisches Probieren mittels Variation aller Tieranzahlen</td><td>Die Anzahl der Schafe, Pferde und Kühe wird systematisch variiert und dann die Richtigkeit der Aussagen überprüft:
<table>
<tr><td>S</td><td>P</td><td>K</td><td>G</td><td>$G-K=7$</td><td>$G-P=8$</td><td>$G-S=9$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>nein</td><td>nein</td><td>nein</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>nein</td><td>nein</td><td>nein</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>12</td><td>ja</td><td>ja</td><td>ja</td></tr>
</table>
(Die Eindeutigkeit der Lösung ist schwierig zu begründen)</td><td>Die Anzahl der Schafe, Pferde und Kühe wird systematisch variiert und dann die Richtigkeit der Aussagen überprüft:
<table>
<tr><td>S</td><td>P</td><td>K</td><td>$P+S=7$</td><td>$K+S=8$</td><td>$K+P=9$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>nein</td><td>nein</td><td>nein</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>nein</td><td>nein</td><td>nein</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>ja</td><td>ja</td><td>ja</td></tr>
</table>
(Die Eindeutigkeit der Lösung ist schwierig zu begründen)</td></tr>
<tr><td>… systematisches Probieren mittels Variation einer Tieranzahl und Berechnung der weiteren Tieranzahlen</td><td></td><td>Die Anzahl der Schafe wird systematisch variiert, die Anzahl der Pferde und Kühe berechnet und dann die Richtigkeit der letzten Aussage überprüft:
<table>
<tr><td>S</td><td>P
wegen
$P+S=7$</td><td>K
wegen
$K+S=8$</td><td>Überprüfung
mittels
$K+P=9$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td><td>7</td><td>13(f)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>11 (f)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>7 (f)</td></tr>
</table>
(Die Eindeutigkeit der Lösung kann begründet werden)</td></tr>
</table>

… Argumentationen zur Vereinfachung und anschließend systematisches Probieren

Ohne Kühe sind die wenigsten Tiere, also muss es am meisten Kühe geben. Ohne Schafe sind die meisten Tiere, also gibt es am wenigsten Schafe, d.h.

$S < P < K$.

Wegen

$G - P = 8$ und $G - S = 9$

muss es genau ein Schaf weniger geben als Pferde, wegen

$G - K = 7$ und $G - P = 8$

muss es genau ein Pferd weniger geben als Kühe.

Systematisches Probieren ergibt:

S	P	K	G	$G - K = 7$	$G - P = 8$	$G - S = 9$
1	2	3	6	nein	nein	nein
2	3	4	9	nein	nein	nein
3	**4**	**5**	**12**	**ja**	**ja**	**ja**
4	5	6	15	nein	nein	nein

(Die Eindeutigkeit der Lösung kann begründet werden)

Da $K + P = 9$ gibt es mindestens 10 Tiere:

G	K wegen $G - K = 7$	P wegen $G - P = 8$	S wegen $G - S = 9$	G neu	Vergleich
10	3	2	1	6	6<10
11	4	3	2	9	9<11
12	**5**	**4**	**3**	**12**	**12=12**
13	6	5	4	15	15>13

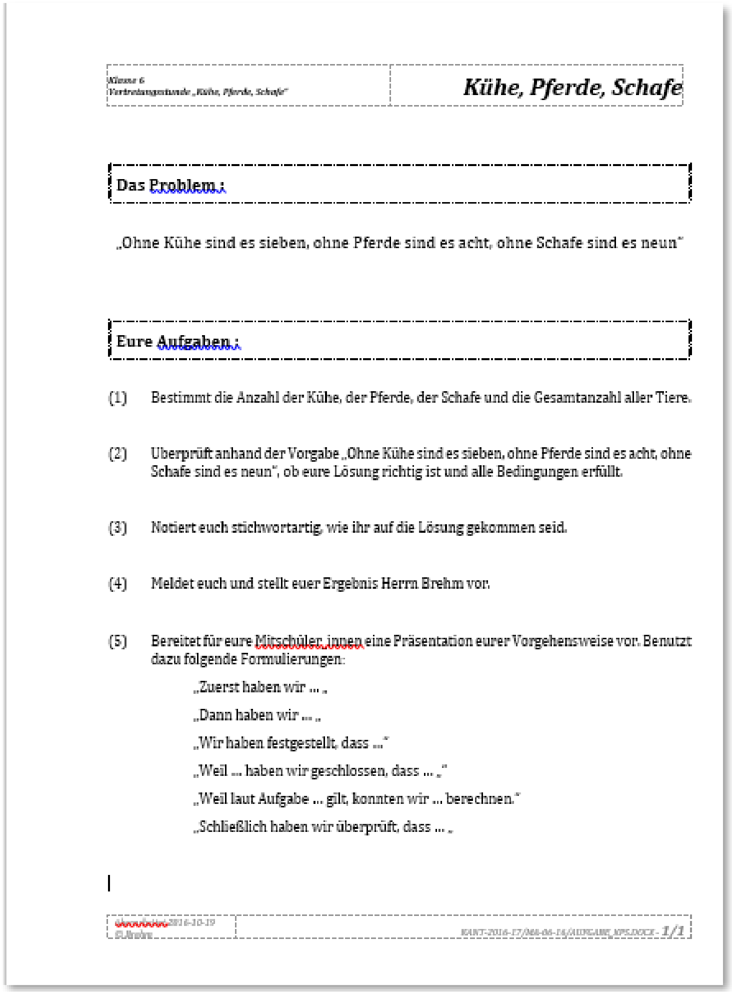
(Die Eindeutigkeit der Lösung kann begründet werden)

… Argumentationen und Benutzung von elementaren Rechnungen		Wegen $K + P = 9$ und $K + S = 8$ folgt, dass es ein Pferd mehr gibt als Schafe. Wegen $P + S = 7$ folgt dann $P = 4$, $S = 3$ und aus $K + S = 8$ sofort $K = 5$. (Die Eindeutigkeit der Lösung ist nachgewiesen)
… Berechnung der Gesamtanzahl der Tiere G		$P + S = 7$ $K + S = 8$ $P + S = 9$ Addiert man die folgenden Gleichungen, so ergibt sich $2K + 2P + 2S = 24$ $2(K + P + S) = 24$ und damit $G = 12$ Durch entsprechende Subtraktion ergibt sich die Lösung $K = 5$, $P = 4$, $S = 3$ (Die Eindeutigkeit der Lösung ist nachgewiesen)
… ein lineares Gleichungssystem	$G - K = 7$, $G - P = 8$, $G - S = 9$, $G - S + P + K = 0$, Lösung mittels geeigneter Verfahren (Gauß-Algorithmus, Additionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren o.ä.). (Die Eindeutigkeit der Lösung ist nachgewiesen)	$P + S = 7$, $K + S = 8$, $K + P = 9$. Lösung geeigneter Verfahren (Gauß-Algorithmus, Additionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren o.ä.). (Die Eindeutigkeit der Lösung ist nachgewiesen)

Schülermaterialien:

Briefumschläge mit je ca. 20 Bildplättchen:

Aufgabenblatt:



Klasse 6
Vertretungsstunde „Kühe, Pferde, Schafe“

Kühe, Pferde, Schafe

Das Problem :

„Ohne Kühe sind es sieben, ohne Pferde sind es acht, ohne Schafe sind es neun“

Eure Aufgaben :

(1) Bestimmt die Anzahl der Kühe, der Pferde, der Schafe und die Gesamtanzahl aller Tiere.

(2) Überprüft anhand der Vorgabe „Ohne Kühe sind es sieben, ohne Pferde sind es acht, ohne Schafe sind es neun“, ob eure Lösung richtig ist und alle Bedingungen erfüllt.

(3) Notiert euch stichwortartig, wie ihr auf die Lösung gekommen seid.

(4) Meldet euch und stellt euer Ergebnis Herrn Brehm vor.

(5) Bereitet für eure Mitschüler_innen eine Präsentation eurer Vorgehensweise vor. Benutzt dazu folgende Formulierungen:

„Zuerst haben wir ... „

„Dann haben wir ... „

„Wir haben festgestellt, dass ...“

„Weil ... haben wir geschlossen, dass ... „“

„Weil laut Aufgabe ... gilt, konnten wir ... berechnen.“

„Schließlich haben wir überprüft, dass ... „

2016-10-19 - 1/1

Hilfekarten (doppelseitig, laminiert):


Hilfekarte A1

Hilfe A1

Ohne Kühe sind es sieben Tiere


Hilfekarte A2

Hilfe A2

Probiert verschiedene Mög-lichkeiten für die Anzahl von Kühen, Pferden und Schafen und füllt die Tabelle sinnvoll aus.


Hilfekarte B1

Hilfe B1

Benutzt die Tiere in den Brief-umschlägen zum Probieren.


Hilfekarte B2

Hilfe B2

Probiert verschiedene Mög-lichkeiten für die Anzahl von Kühen, Pferden und Schafen und füllt die Tabelle sinnvoll aus.

Hilfstabellen: